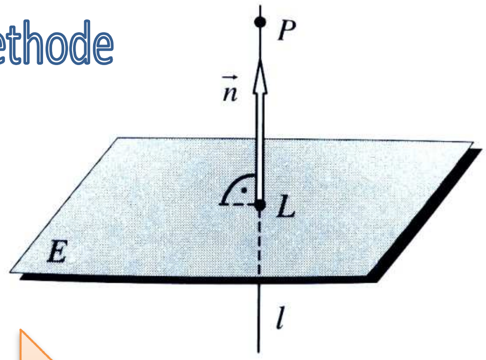
Abstandsberechnungen mit der Lotfußpunktmethode

Fachreferat von Jonathan Keller



Die Berechnung des Abstands zwischen einem Punkt *P* und einer Ebene *E*

kann in folgenden Schritten erfolgen:

1. **Lotgerade bestimmen**
2. **Lotfuß-punkt L berechnen**
3. **Länge des Lotes von P nach L berechnen**

= Abstand Punkt - Ebene

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Lotgeraden l. Sie besitzt den Punkt *P* als Stützpunkt und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene als Richtungsvektor:

$$l\colon \vec{x} = \vec{p} + \ t \cdot \ \vec{n}$$

2. Berechnen Sie den Lotfußpunkt L als Schnittpunkt der Ebene E mit der Lotgeraden l.

3. Berechnen Sie die Länge des Lotes über den Betrag des Vektors $\overrightarrow{PL}$. Dies entspricht dem Abstand des Punktes P auf die Ebene E:

$$d(P,E) = d(P,L) = |\overrightarrow{PL}|$$

Beispiel: Gesucht ist der Abstand von *P* (4|3|1) auf die Ebene $E\colon 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$.

1. Die Lotgerade hat die Gleichung $l\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Durch Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 5 \quad \Rightarrow 19 + 14 \cdot t = 5 \quad \Rightarrow t = -1$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung der Lotgeraden ein, so ergibt sich der Lotfußpunkt *L* (1|1|0).

3. Damit gilt $\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und man erhält für den gesuchten Abstand

$$|\overrightarrow{PL}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74 \text{ LE}$$

Anwendungen, die sich auf dieses Problem zurückführen lassen:

- ✓ Abstand Ebene – parallele Gerade
- ✓ Abstand paralleler Ebenen
- ✓ Höhenbestimmungen in Körpern
- ✓ Bestimmung einer Spiegelebene oder von Bildpunkten bei einer Spiegelung

Abstand Gerade-Ebene

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die Gerade g und die Ebene E parallel sind und berechnen Sie deren Abstand voneinander.

a) $E\colon -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8 = 0 \qquad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstand Ebene-Ebene

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind. Berechnen Sie den Abstand.

a) $E_1\colon 8x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 13 \qquad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad E_2 : \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \vec{x} + 22 = 0$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Ebenen parallel sind. Ermitteln Sie eine Gleichung der Mittelparallelenebene.

$E_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 6 \qquad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungen

Fachreferat von Jonathan Keller

1. a) $E\colon -x_1+4x_2+2x_3-8=0 \qquad g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\circ\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \text{g}||\text{E}$

$l\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ in E $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}\right]-8=0 \;\Rightarrow -13+21\cdot t-8=0$

$$t=1$$

$L\,(4|1|4) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AL}=\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{AL}\right|=\sqrt{21}$ LE (Abstand von g zu E)

1 b) Achtung ich hab in der Angabe wieder die -2 eingesetzt sonst hätts keinen Sinn gemacht. Sorry!!

$g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix} \qquad E\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\circ\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \text{g}||\text{E} \qquad l\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right]=0 \quad\Rightarrow -16+14\cdot t-4=0$$

$t=\frac{10}{7}$ in l: $\quad \text{L}\left(-\frac{8}{7}\,\middle|\,-\frac{9}{7}\,\middle|\,\frac{17}{7}\right) \quad \overrightarrow{PL}=\begin{pmatrix}-\frac{20}{7}\\\frac{30}{7}\\-\frac{10}{7}\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{PL}\right|=\frac{10\sqrt{14}}{7}$ LE

2 a) $E_1\colon 8x_1-5x_2-4x_3=13 \qquad E_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$

$\text{L}\left(\frac{611}{105}\,\middle|\,\frac{47}{21}\,\middle|\,\frac{587}{105}\right) \quad\Rightarrow\quad \left|\overrightarrow{PL}\right|=\sqrt{\frac{1369}{105}}$

2 b) $E_1\colon \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right)=0 \qquad E_2\colon \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}\circ\vec{x}+22=0$

L$\left(\frac{17}{3} \mid -\frac{2}{3} \mid \frac{14}{3}\right)$ $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{PL}| = \frac{11\sqrt{3}}{3}$ LE

3) $E_1: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 6$ $\quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

L$\left(\frac{4}{9} \mid \frac{4}{9} \mid 4\ \frac{2}{9}\right)$ $\quad |\overrightarrow{PL}| = \frac{2}{3}$ LE $\Rightarrow$:2 $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{ML}| = \frac{1}{3}$ LE

$$E_M: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 4\frac{1}{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Is alles 100% richtig :-) hab jetz nur nimmer ganz den Rechenweg hingemacht...